Teknillinen korkeakoulu
Mat-1.1020 Matematiikan peruskurssi L2, kevät 2006
Alestalo/Marola

1. välikoe 20.2.2006 klo 12–15.

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Vain funktiolaskimet ovat sallittuja!

1. Laske integraalit

$$\int_0^4 e^{2\sqrt{x}}\,dx \quad \text{ja} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}.$$

2. a) Eräänä päivänä ilman lämpötila $f(t)$ hetkellä t mitattiin kahden tunnin välein (alkaen keskiyöstä), jolloin tulokseksi saatiin arvot 10, 10, 12, 14, 16, 18, 21, 20, 19, 18, 16, 16, 14 astetta. Arvioi kyseisen vuorokauden keskilämpötilaa

$$\frac{1}{24}\int_0^{24} f(t)\,dt$$

käyttämällä trapetsisääntöä.

b) Tarkastellaan integraalin $\int_0^1 (ax^3+bx^2+cx+d)\,dx$ numeerisia approksimaatioita tapauksessa $x_0 = 0, x_1 = 1$. Onko olemassa sellaista vakiota $\lambda > 0$, että lauseke

$$S_1 = \lambda T_1 + (1-\lambda)M_1$$

antaa integraalin arvon tarkasti kaikilla $a, b, c, d \in \mathbf{R}$? (Merkinnät: katso alla.)

3. a) Määritä alkuarvotehtävän $y' = e^{x+y}$, $y'(0) = 0$, ratkaisu.
b) Toteutuvatko Picardin ja Lindelöfin lauseen ehdot alueessa $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tälle alkuarvotehtävälle?

4. a) Ratkaise differentiaaliyhtälöön $y''-4y'+4y = 4x$ liittyvä alkuarvotehtävä $y(0) = 0, y'(0) = 0$.
b) Differentiaaliyhtälön $x^3y'' + xy' - y = 0$ eräs ratkaisu on $y_1(x) = x$. Määritä yleinen ratkaisu välillä $(0, \infty)$. (Huom: Kyseessä ei ole Eulerin differentiaaliyhtälö.)

Kaavoja:

$$T_n = h(f(x_0)/2 + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_n)/2),$$

$$M_n = h(f(m_1) + f(m_2) + \cdots + f(m_n)), \quad m_k = (x_{k-1} + x_k)/2.$$

Note: Please ask for an English version if you need one. Provet på svenska: Vänd!

1. Beräkna integralerna

$$\int_0^4 e^{2\sqrt{x}}\,dx \quad \text{och} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}.$$

2. a) En dag uppmättes lufttemperaturen $f(t)$ vid tiden t med två timmars mellanrum med start vid midnatt, varvid man fick som resultat talen 10, 10, 12, 14, 16, 18, 21, 20, 19, 18, 16, 16, 14 grader. Approximera medeltemperaturen

$$\frac{1}{24}\int_0^{24} f(t)\,dt$$

för detta dygn genom att använda trapetsmetoden.
b) Vi studerar numeriska approximationer av integralen

$$\int_0^1 (ax^3 + bx^2 + cx + d)\,dx$$

med $x_0 = 0, x_1 = 1$. Finns det någon konstant $\lambda > 0$ sådan att uttrycket

$$S_1 = \lambda T_1 + (1-\lambda)M_1$$

ger integralens värde exakt för alla $a, b, c, d \in \mathbf{R}$? (Beteckningar: se nedan.)

3. a) Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet $y' = e^{x+y}$, $y'(0) = 0$.
b) Satisfieras kraven för Picards och Lindelöfs sats i området $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ för detta begynnelsevärdesproblem?

4. a) Bestäm lösningen till differentialekvationen $y'' - 4y' + 4y = 4x$ som satisfierar begynnelsevillkoren $y(0) = 0, y'(0) = 0$.
b) En lösning till differentialekvationen $x^3y'' + xy' - y = 0$ är $y_1(x) = x$. Bestäm den allmänna lösningen i intervallet $(0, \infty)$. (Märk att det är inte en Eulersk differentialekvation.)

Formler:

$$T_n = h(f(x_0)/2 + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_n)/2),$$

$$M_n = h(f(m_1) + f(m_2) + \cdots + f(m_n)), \quad m_k = (x_{k-1} + x_k)/2.$$

Note: Please ask for an English version if you need one. Koe suomeksi: Käännä!