Kvantti-ilmiöt, kevät 19, välikoe 2 malliratkaisut

Tehtävä 1 malliratkaisu

a) Spin on hiukkasen sisäinen ominaisuus (1p). Se on kulmaliikemäärän esiintymismuoto (1p), mutta sitä ei voi ymmärtää klassisesti esim. hiukkasen pyörimisen avulla, sillä myös pistemäisillä hiukkasilla on spin.

b) Paulin kieltosääntö sanoo, että kaksi identtistä fermionia (esim. elektronia) ei voi olla yhtäaikaa samassa kvanttitilassa. (1p) Sääntö on seurausta fermionien aaltofunktion antisymmetrisyydestä. (1p)

c) Metastabiili tila on kvanttisysteemin energian ominaistila, joka ei voi purkaantua alemmalle energian ominaistilalle, koska valintasäännöt kieltävät siirtymän. (1p) Tämän vuoksi metastabiililla tilalla on pidempi elinaika kuin normaalisti. (1p)

d) Puoliintumisaika on aika, jossa puolet radioaktiivisen ainenäytteen atomeista on hajonnut. (2p)

e) Diracin yhtälön mukaan elektronin energia voi saada myös arvot mielivaltaisen negatiivisia arvoja, $E < -m_e c^2$. Dirac selitti positiivisen energian omaavien elektronien vakauden sillä, että negatiiviset energiatilat ovat jo täynnä elektroneja. Tätä negatiivisen energian elektronien joukkoa kutsutaan Diracin mereksi (1p). Paulin kieltosäännön nojalla elektronin positiiviset energiatilat eivät voi purkaantua negatiivisille energioille, koska ne ovat jo täynnä (1p).

f) Kvanttikenttäteorian tyhjiöfluktuaatiot aiheuttavat äärettömiä kontribuutioita joihinkin fysikaalisiin suureisiin. (1p) Mekanismia, jonka avulla suureista vähennetään äärettömät tyhjiökontribuutiot kutsutaan renormalisaatioksi (1p).

Tehtävä 2 malliratkaisu

a) Luomisoperaattorin koordinaattiesitys saadaan sijoittamalla paikka- ja liikemääräoperaattoreiden lausekkeet $\hat{x} = x$, $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ (2p) luomisoperaattorin lausekkeeseen:

$$\hat{a}^* = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial}{\partial x}\right). \qquad \text{(1p)} \tag{1}$$

Operoidaan tällä operaattorilla kerran (1p) perustilan aaltofunktioon ensimmäisen viritetyn tilan

aaltofunktion generoimiseksi:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\left(x - \frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial}{\partial x}\right)\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) \qquad \text{(1p)} \\ &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}(2x)\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right). \qquad \text{(1p)} \end{aligned} \tag{2}$$

b) Säteilyn taajuuden tulee olla siirtymän resonanssitaajuus $f = \Delta E/h$, missä ΔE on energiatilojen energiaero (1p). Harmonisen oskillaattorin energian ominaisarvot ovat $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, joten kolmannen viritetyn tilan energia on $E_3 = \frac{7}{2}\hbar\omega$. (2p) Energiaeroksi saadaan siis $\Delta E = \frac{7}{2}\hbar\omega - \frac{1}{2}\hbar\omega = 3\hbar\omega$. (1p) Resonanssitaajuus on

$$f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{3\hbar\omega}{h} = \frac{3\omega}{2\pi} = \frac{3}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \approx 5{,}5 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}. \qquad \text{(2p)} \tag{3}$$

Tehtävä 3 malliratkaisu

a) Perustilassa $n = 1$ olevan elektronin ratakulmaliikemäärän kvanttiluku $l = 0$ (1p), ratakulmaliikemäärän z-komponentin kvanttiluku $m_l = 0$ (1p), ja spinkvanttiluku $m_s = \pm\frac{1}{2}$ (1p). Viritystilassa $n = 3$ olevan elektronin ratakulmaliikemäärän kvanttiluku $l = 0, 1, 2$ (1p), ratakulmaliikemäärän z-komponentin kvanttiluku $m_l = -l, -l+1, \ldots, l-1, l$ (1p), ja spinkvanttiluku $m_s = \pm\frac{1}{2}$ (1p).

b) Koska elektronit ovat eri elektronikuorilla, alimmassa energiatilassa elektronien aaltofunktion spinosa on symmetrinen (1p), eli yksi kolmesta vaihtoehdosta:

$$|+\rangle|+\rangle, \qquad |-\rangle|-\rangle, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle|-\rangle + |-\rangle|+\rangle\right). \tag{4}$$

Tällöin aaltofunktion avaruusosa on antisymmetrinen, ja elektronit keskimäärin kauempana toisistaan, joten elektronien väliseen sähköiseen vuorovaikutukseen liittyvä potentiaalienergia on pienempi. (1p) Symmetrisessä spintilassa elektronien kokonaisspin on 1. (1p)

Viritystilassa $n = 3$ olevan elektronin energia on pienin mahdollinen, kun $l = 0$ (1p), sillä tällöin elektronin rata on keskimäärin elliptisempi kuin muilla ratakulmaliikemäärän arvoilla, ja toinen elektroni pääsee neutraloimaan ytimen varausta vähemmän (1p). Tällöin ratakulmaliikemäärän z-komponentti $m_l = 0$. (1p)

Tehtävä 4 malliratkaisu

a) Massa alussa: $m_i = m({}^{235}_{92}U) + m_n = 236{,}052589$ u. (2p) Massa lopussa: $m_f = m({}^{141}_{56}Ba) + m({}^{92}_{36}Kr) + 3m_n = 235{,}866628$ u. (2p) Vapautuva energia:

$$Q = (m_i - m_f)c^2 = (236{,}052589\ \text{u} - 235{,}866628\ \text{u}) \cdot 931{,}5\ \frac{\text{MeV}}{\text{u}} \approx 173{,}2\ \text{MeV}. \qquad \text{(2p)} \tag{5}$$

Vapautuvan energian laskemisessa voitiin käyttää isotooppien massoja ytimien massojen sijaan, sillä elektronien massa kumoutuvat. (2p)

b) Koska uraani-235:n hajoamisreaktiossa vapautuu lisää neutroneita, niin ketjureaktio on mahdollinen: Jos kasataan uraani-235-atomeita riittävän tiiviisti yhteen (esim. rikastamalla luonnosta löytyvää uraania), niin vapautuvat neutronit voivat aiheuttaa edelleen uusia hajoamisia, ja näin vapautuu lisää energiaa. (1p) Hajoamisreaktio kuluttaa yhden neutronin, mutta vapauttaa kolme, joten reaktiossa syntyy kaksi neutronia lisää. Näin ollen neutronien määrä voi kasvaa jopa eksponentiaalisesti reaktioiden edetessä, ja energiaa voi vapautua suuria määriä hyvin lyhyessä ajassa. (1p) Uraani-235:n ketjureaktiota voidaan käyttää energian tuottamiseen esim. ydinreaktorissa, jossa reaktioiden nopeutta ja vapautuvan energian määrää voidaan kontrolloida neutroneja absorboivilla kontrollisauvoilla, jotta reaktio ei ryöstäydy käsistä. (1p) Reaktorin ympärillä on vettä, joka absorboi reaktioissa syntyviä korkeaenergisiä neutroneita, ja siten neutronien liike-energia muuttuu veden lämpöenergiaksi, joka voidaan edelleen muuntaa esim. liike-energiaksi höyryturbiinin avulla. (1p)

Tehtävä 5 malliratkaisu

a) Hiukkasfysiikan standardimalli on alkeishiukkasia ja niiden välisiä perusvuorovaikutuksia (1p) kuvaamaan kehitetty kvanttikenttäteoreettinen malli (1p). Se kuvaa kaikkia luonnon perusvuorovaikutuksia paitsi painovoimaa (1p). Malli koostuu kvarkkien ja gluonien välisiä vahvoja vuorovaikutuksia kuvaavasta kvanttikromodynamiikasta, sekä sähköheikosta teoriasta, joka yhdistää sähkömagneettiset ja heikot vuorovaikutukset. (1p)

b) Kvanttikromodynamiikka kuvaa hadronien koostuvan kvarkeista. (1p) Kvarkeilla on värivaraus, joten ne vuorovaikuttavat vahvan ydinvoiman välityksellä, joka sitoo ne hadronien sisälle. (1p) Värivarauksen omaavien hiukkasten välinen vahva ydinvoima kasvaa hiukkasten etäisyyden kasvaessa, joten tällaiset hiukkaset eivät voi ikinä esiintyä yksistään. (1p) Hadronit ovat kvarkkien yhdistelmiä, jotka ovat neutraaleja värivarauksen suhteen. (1p)

c) Sähköheikon teorian mukaan korkeilla energioilla sähkömagneettiset ja heikot vuorovaikutukset yhdistyvät (1p). Niiden välittäjähiukkanen on massaton, joten sähköheikolla vuorovaikutuksella on pitkä kantama. (1p) Matalilla energioilla sähkömagneettisen ja heikon vuorovaikutuksen välinen symmetria rikkoontuu (1p), ja heikon vuorovaikutuksen välittäjähiukkaset saavat massan, joten heikko vuorovaikutus muuttuu lyhytkantoiseksi. (1p)