1. (a)

$$x_1(t) = \cos(2\pi \cdot 1 \cdot t + \pi/2) = \cos(2\pi t + \pi/2)$$

1p oikeasta amplitudista + 1p oikeasta vaiheesta

(b) Sinimuotoisen värähtelyn teho

$$P_1 = \frac{A^2}{2} = \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2},$$

jossa A värähtelyn amplitudi.

1p järkevästä ratkaisutavasta + 1p oikeasta vastauksesta $P_1 = 1/2$

(c) Näytteenottotaajuus $f_s = 1/T_s = 200/3 \approx 66.67$Hz. Laskostumista ei tapahdu. Näytteistetty signaali sisältää alkuperäistä 1 Hz taajuutta.

3p per oikea taajuus - 1p per väärä taajuus

(d) Näytteenottotaajuus $f_s = 1/T_s = 200$Hz. Laskostumista ei tapahdu. Näytteistetty signaali sisältää alkuperäistä 1 Hz taajuutta.

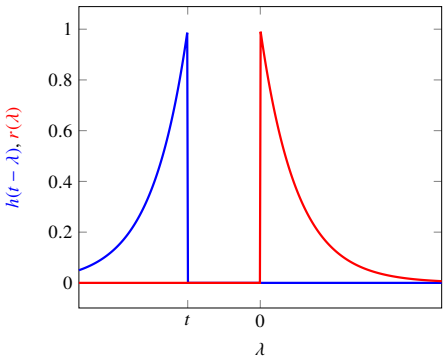
3p per oikea taajuus - 1p per väärä taajuus

2.

$$h_{tot}(t) = (h_{RC} \otimes h_{RC})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{RC}(\lambda) h_{RC}(t-\lambda) d\lambda$$

Jaetaan konvoluutio määrittelyalueisiinsa:

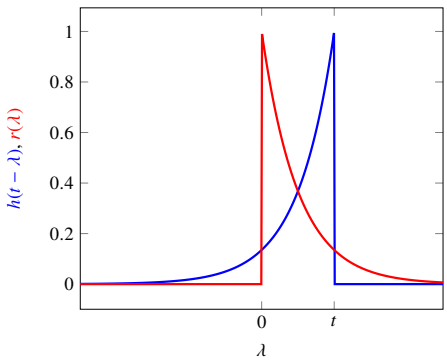
$t < 0$



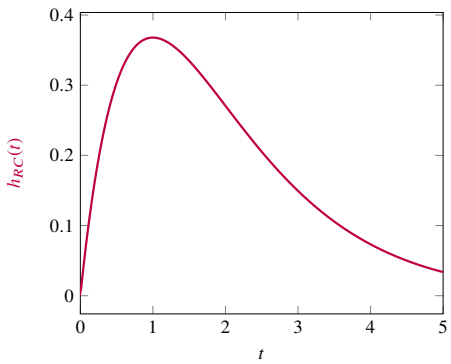
Funktiot eivät ole limittäin ja niiden tulo on nolla, joten

$$h_{RC}(t < 0) = 0$$

$t \geq 0$



$$h_{RC}(t \geq 0) = \int_0^t e^{-\lambda} \cdot e^{-(t-\lambda)} d\lambda = \int_0^t e^{-t} d\lambda = te^{-t}$$



$$h_{RC}(t) = \begin{cases} te^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

2p jos jotain hyödyllistä paperissa + 2p oikeasta määrittelyalueista + 6p oikeista funktioista

3. (a)

$$x_3(t) = \begin{cases} 1 - |t-1|, & t \in [0,2] \\ 0, & t \notin [0,2] \end{cases} = \begin{cases} t, & t \in [0,1] \\ 2-t, & t \in [1,2] \\ 0, & t \notin [0,2] \end{cases} = \mathrm{tri}\left(\frac{t-1}{1}\right)$$

2p funktion yksikäsitteisestä lausekkeesta, määrittely osissa sallittu

(b) Ratkaisussa voidaan hyödyntää symmetriaa pisteen $t = 1$ suhteen.

$$E_3 = \int_{-\infty}^{\infty} |x_3(t)|^2 dt = \int_0^1 (t)^2\, dt + \int_1^2 (2-t)^2\, dt = 2\int_0^1 t^2 dt = 2/3$$

1p jos jotain hyödyllistä paperissa + 1p oikea energia $E_3 = 2/3$

(c) $X_3(f)$ voidaan ratkaista määritelmästä tai kaavakokoelman avulla. Kaavakokoelma s.3 kolmiopulssin Fourier'n muunnos ja s.2 aikasiirron Fourier'n muunnos:

$$X_3(f) = \mathcal{F}\left\{\mathrm{tri}\left(\frac{t-1}{1}\right)\right\} = e^{-2\pi j f \cdot 1}\mathcal{F}\left\{\mathrm{tri}\left(\frac{t}{1}\right)\right\} = e^{-2\pi j f}\,\mathrm{sinc}^2(f)$$

Energiaspektri

$$|X_3(f)|^2 = \mathrm{sinc}^4(f).$$

1p jos jotain hyödyllistä paperissa + 1p oikeasta muunnoksesta + 1p oikeasta energiaspektristä

(d) Kaavakokoelma s.2 asteikon vaihto.

$$Y_3(f) = \mathcal{F}\{x_3(t/2)\} = \frac{1}{|1/2|}X_3\left(\frac{f}{1/2}\right) = 2X_3(2f) = 2e^{-4\pi j f}\,\mathrm{sinc}^2(2f)$$

Energiaspektri

$$|Y_3(f)|^2 = 4\mathrm{sinc}^4(2f).$$

2p oikeasta muunnoksesta + 1p oikeasta energiaspektristä

4. (a)

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{60\text{ Hz}} = \frac{1}{60}\text{ s} \approx 16.6\text{ ms}$$

2p oikeasta jaksonajasta

(b)

$$P_4 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |x_4(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} 2v_{RMS}^2 dt = \frac{2v_{RMS}^2}{T_0}T_0 = 2v_{RMS}^2$$

1p jos jotain hyödyllistä paperissa + 2p oikeasta tehosta

(c) Koska funktio on antisymmetrinen, sen kosinisarjan kertoimet $a_n = 0$.

$$c_n = -jb_n - j\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x_4(t)\sin(2\pi f_0 nt)dt = \frac{\sqrt{2}v_{RMS}}{T_0 j}\int_0^{T_0/2}\sin(2\pi f_0 nt)dt - \frac{\sqrt{2}v_{RMS}}{T_0 j}\int_{T_0/2}^{T_0}\sin(2\pi f_0 nt)dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}v_{RMS}}{2\pi f_0 n T_0 j}\left[\Big/_{T_0/2}^{T_0}\cos(2\pi f_0 nt) - \Big/_{0}^{T_0/2}\cos(2\pi f_0 nt)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}v_{RMS}}{2\pi f_0 n T_0 j}\left[(\cos(2\pi f_0 n T_0) - \cos(2\pi f_0 n T_0/2)) - (\cos(2\pi f_0 n T_0/2) - 1)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}v_{RMS}}{2\pi n j}\left[(\cos(2\pi n) - \cos(\pi n)) - (\cos(\pi n) - 1)\right] = \frac{\sqrt{2}v_{RMS}}{2\pi n j}\left[(1-(-1)^n) - ((-1)^n - 1)\right]$$

$$= \sqrt{2}v_{RMS}\frac{1-(-1)^n}{\pi n j} = \begin{cases} 2\sqrt{2}v_{RMS}/\pi n j, & n \text{ on parillinen} \\ 0, & n \text{ on pariton} \end{cases}$$

2p jos jotain hyödyllistä paperissa + 2p suunnilleen oikeasta muunnoksesta + 1p oikeasta muunnoksesta

5. Vaste on sinimuoista värähtelyä taajuudella 3 Hz. Luetaan vahvistus ja vaihe tältä taajuudelta.

$$A(3) = 10^{-51.036/20} \approx 0.0028067$$

$$\phi(3) = -3.0356$$

Heräte

$$y_5(t) = A(3) \cdot 1234 \cdot \cos(2\pi \cdot 3 \cdot t + \phi(3)) \approx 3.4635 \cos(2\pi \cdot 3 \cdot t - 3.0356)$$

2p jos jotain hyödyllistä paperissa + 4p oikeasta amplitudista + 4p oikeasta vaiheesta

6. (a) Koska kohinaprosessit ovat ortogonaalisia, summaprosessin tehospektri on tehospektrien summa.

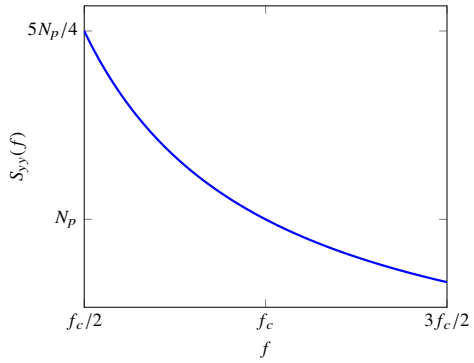
$$S_{yy}(f) = S_{ww}(f) + S_{pp}(f) = N_w + \frac{N_p}{f}$$

Rajataajuuden ehdosta voidaan ratkaista rajataajuus.

$$S_{ww}(f_c) = S_{pp}(f_c)$$

$$N_w = \frac{N_p}{f_0}$$

$$f_0 = \frac{N_p}{N_w}$$



1p yhteenlaskun perustelemisesta ortogonaalisuudella + 1p tehospektristä + 1p hahmotelmasta

(b)

$$P_w = \int_{f_c/100}^{f_c} S_{ww}(f)df = \int_{f_c/100}^{f_c} N_w df = N_w\left(f_c - \frac{f_c}{100}\right) = \frac{99}{100}N_w f_c = \frac{99}{100}N_p$$

1p jos jotain hyödyllistä paperissa + 2p oikeasta tehosta

(c)

$$P_p = \int_{f_c/100}^{f_c} S_{pp}(f)df = \int_{f_c/100}^{f_c} \frac{N_p}{f}df = N_p\int_{f_c/100}^{f_c} \frac{1}{f}df$$

$$= N_p \int_{f_c/100}^{f_c} \ln(|f|) = N_p\left(\ln(f_c) - \ln(f_c/100)\right) = N_p \ln\left(\frac{f_c}{f_c/100}\right) = N_p \ln(100) = 2N_p \ln(10)$$

1p jos jotain hyödyllistä paperissa + 2p oikeasta tehosta

(d)

$$10 \cdot \log_{10}\left(\frac{P_p}{P_w}\right) = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{2N_p \ln(10)}{\frac{99}{100}N_p}\right) = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{200\ln(10)}{99}\right) \approx 6.6761$$

1p oikeasta logaritmisesta suhteesta