MS-A0003, MS-A0005 Matriisilaskenta (Aalto-yliopisto)
Turunen / Maanpää

Välikoe 2 (8.12.2015 klo 16:30–19:30)

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Laskimet ja taulukot eivät ole sallittuja.

Arvostelusta: Tarkastaja pisteyttää jokaisen tehtävän asteikolla 0...6. Täydet pisteet voi saada vastauksesta, jossa on harmiton pikkuvirhe. Tehtävästä on mahdollista saada pisteitä, jos vastauksessa on vähänkin asiaa (oikeanlaisia määritelmiä, aiheeseen liittyviä kuvia, laskelmia jne.) — tyhjä vastaus on varmasti nollan pisteen arvoinen.

Huomio: Vektorien $x, y \in \mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^{n\times 1}$ *sisätulo* on $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k} \in \mathbb{C}$.

Matriisin $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *adjungaatti* $A^* \in \mathbb{C}^{n\times m}$ toteuttaa

$$(A^*)_{jk} = \overline{A_{kj}} \in \mathbb{C}.$$

Toisin sanoen $\langle Ax, v\rangle = \langle x, A^*v\rangle$ kaikilla $x \in \mathbb{C}^n$ ja $v \in \mathbb{C}^m$.

1. Havaitaan, että $AS = SD$, kun

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} a & -b & -c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   a) Olkoon $a \neq 0$. Millä arvoilla $b, c \in \mathbb{C}$ on A diagonalisoituva? Perustele!

   b) Olkoon $a = 0$. Millä arvoilla $b, c \in \mathbb{C}$ on A diagonalisoituva? Perustele!

2. Olkoon $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *symmetrinen* eli $S^* = S$.
   Olkoon $N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *normaali* eli $N^*N = NN^*$.
   Olkoon $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *unitaarinen* eli $U^* = U^{-1}$ (eli $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$).
   Olkoon $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *positiivinen* eli $\langle Px, x\rangle \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{C}^n$.

   a) Näytä, että matriisin P ominaisarvoille $\lambda \in \mathbb{C}$ pätee $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$.

   b) Näytä, että S on normaali ja sen ominaisarvot ovat reaaliset.

   c) Näytä, että U on normaali ja sen ominaisarvoille $\lambda \in \mathbb{C}$ pätee $|\lambda| = 1$.

   (a,b,c-kohtien vihje: tutki sisätuloja $\langle Ax, x\rangle$, kun $Ax = \lambda x$ ja $\langle x, x\rangle = 1$.)

3. Laske matriisin $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ jokin reaalinen singulaariarvohajoitelma (SVD).
   Toisin sanoen etsi reaaliset matriisit U, Σ, V, joille $A = U\Sigma V^*$,
   missä U, V ovat ortogonaalisia (unitaarisia) ja
   $\Sigma \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ on singulaariarvo(je)n diagonaalimatriisi (siis $\Sigma_{21} = 0$).
   Tarkista, että $A = U\Sigma V^*$.
   Mikä on tällöin matriisin $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix}$ (eräs) singulaariarvohajoitelma?
   (Vihje: $B = A^*$, joten aiemmasta SVD:stä voi olla hyötyä.)

(English problems on the other side!)

MS-A0003, MS-A0005 Matrix algebra (Aalto University)
Turunen / Maanpää

2nd mid-term exam (8.12.2015, 4:30pm–7:30pm)

Please fill in the required information onto each answer sheet.

Calculators and mathematical tables are not allowed.

About grading: Every exam problem will be graded from 0 to 6 points. Harmless small errors do not prevent from getting maximal points. You will get points if your answer contains at least some information (relevant definitions, pictures, calculations etc) — empty answer is surely worth zero.

Note: The *inner product* of vectors $x, y \in \mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^{n\times 1}$ is $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k} \in \mathbb{C}$.

The *adjoint* $A^* \in \mathbb{C}^{n\times m}$ of matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ satisfies

$$(A^*)_{jk} = \overline{A_{kj}} \in \mathbb{C}.$$

In other words, $\langle Ax, v\rangle = \langle x, A^*v\rangle$ for all $x \in \mathbb{C}^n$ and $v \in \mathbb{C}^m$.

1. We notice that $AS = SD$, when

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} a & -b & -c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   a) Let $a \neq 0$. For which $b, c \in \mathbb{C}$ the matrix A is diagonalizable? Justify!

   b) Let $a = 0$. For which $b, c \in \mathbb{C}$ the matrix A is diagonalizable? Justify!

2. Let $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ be *symmetric*, i.e. $S^* = S$.
   Let $N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ be *normal*, i.e. $N^*N = NN^*$.
   Let $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ be *unitary*, i.e. $U^* = U^{-1}$ (i.e. $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$).
   Let $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ be *positive*, i.e. $\langle Px, x\rangle \geq 0$ for all $x \in \mathbb{C}^n$.

   a) Show that the eigenvalues $\lambda \in \mathbb{C}$ of P satisfy $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$.

   b) Show that S is normal and that its eigenvalues are real.

   c) Show that U is normal and that its eigenvalues $\lambda \in \mathbb{C}$ satisfy $|\lambda| = 1$.

   (Hint for a,b,c: study inner products $\langle Ax, x\rangle$ for $Ax = \lambda x$ and $\langle x, x\rangle = 1$.)

3. Find a real singular value decomposition (SVD) for matrix $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.
   In other words, find real matrices U, Σ, V, for which $A = U\Sigma V^*$,
   where U, V are orthogonal (unitary) and
   $\Sigma \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ is the diagonal matrix of the singular value(s) (so $\Sigma_{21} = 0$).
   Check that $A = U\Sigma V^*$.

   What is then a singular value decomposition for matrix $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix}$?
   (Hint: $B = A^*$, so that the previous SVD might help.)

(Suomenkieliset kysymykset kääntöpuolella!)