



Aalto-yliopisto

MS-C1340 / Kevät 2015

Tentti ke 6.5.15 klo 16:30–19:30

**Tehtävä 1:**

- a) Oletetaan vektoriavaruuden käsite tunnetuksi. Määrittele vektoriavaruuden aliavaruus ja sen dimensio.
- b) Näytä, että  $\{1, 2x, 4x^2 - 2\}$  on polynomiavaruuden  $\mathbb{P}_2$  (= korkeintaan toisen asteen reaalkertoimiset polynomit) kanta.

**Tehtävä 2:** Näytä, että matriisin  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$  ydin ja riviavaruus ovat ortogonaaliset.

**Tehtävä 3:** Diagonalisoimalla matriisi  $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$  etsi  $A$ :lle neliöjuuri eli matriisi  $B$ , jolle pätee  $B^2 = A$ .

**Tehtävä 4:** Määritä systeemin  $y' = Ay$  yleinen ratkaisu, kun

a)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$     b)  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

**Tehtävä 5:** Tarkastellaan epälineaarista systeemiä

$$\begin{aligned}x' &= 2y(z - 1) \\y' &= -x(z - 1) \\z' &= -z^3,\end{aligned}$$

missä  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Tutki origon stabiilisuutta:

- a) Linearisoi systeemi origon ympärillä. Mitä voit päätellä origon stabiiliudesta pelkän lineaarisoinnin perusteella?
- b) Käyttämällä Lyapunov-funktiota muotoa  $ax^2 + by^2 + cz^2$  päättele, että origo on stabiili.