Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto, perustieteiden korkeakoulu

Pitkäranta/Laaksonen

Mat-1.1020 Peruskurssi L2

Välikoe 2 25.03.2013

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 3h.

1. a) Määritä LU-hajotelma matriisille $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

   b) Todista matriisialgebran säännöillä väittämä: Jos $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ja $\mathbf{C}$ ovat samaa kokoa olevia neliömatriiseja ja $\mathbf{CA} = \mathbf{AB} = \mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ = yksikkömatriisi), niin $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

2. Katsottaessa kolmiulotteista maisemaa kaukaa suunnasta $\vec{n} = \frac{1}{7}(6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k})$ nähdään maiseman piste $P = (x, y, z)$ kohtisuorana projektiopisteenä P' tasolla T, joka kulkee origon O kautta ja jonka normaali on $\vec{n}$. Olkoon $P' = (x', y')$ T:n sellaisessa karteesisessa koordinaatistossa $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, jossa $\vec{e}_1$ osoittaa katsojan suunnasta vaakasuoraan oikealle, eli $\vec{e}_1$ on vektorin $\vec{k} \times \vec{n}$ suuntainen, ja $\vec{e}_2$ osoittaa ylöspäin, eli $\vec{e}_2 \cdot \vec{k} > 0$. Määritä kuvaus $(x, y, z) \to (x', y')$ lineaarikuvauksena $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ja laske, millaisena kuviona katsoja näkee xy-tasolla olevan neliön muotoisen kentän, jonka vastakkaiset kärkipisteet ovat $(0, 0, 0)$ ja $(-\sqrt{5}, \sqrt{5}, 0)$. Piirrä kuva!

3. Yhtälö
$$\int_0^1 \frac{e^{xyt}}{(x + y + t)^2}\, dt = a$$
   määrittelee pisteen $x = 0$ ympäristössä funktion $y(x)$. Määritä a ja $y'(0)$, kun $y(0) = 1$.

4. a) Olkoon $\vec{F}$ avaruuden vektorikenttä ja f skalaarikenttä. Johda derivointikaava $\nabla \times (f\vec{F}) = \nabla f \times \vec{F} + f\, \nabla \times \vec{F}$.

   b) Sähkövirran tiheys avaruudessa on lieriökoordinaatistossa $\vec{J} = e^{-r^2}\vec{e}_z$. Virta synnyttää magneettikentän muotoa $\vec{H} = H(r)\vec{e}_\varphi$, missä $H(0) = 0$. Määritä $H(r)$ Maxwellin yhtälöstä
$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \partial_r & \partial_\varphi & \partial_z \\ H_r & rH_\varphi & H_z \end{vmatrix} = \vec{J}.$$

Institutionen för matematik och systemanalys
Aalto-universitetet, högskolan för teknikvetenskaper

Pitkäranta/Laaksonen

Mat-1.1020 Grundkurs L2

Mellanförhör 2 25.03.2013

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Räknare är inte tillåten. Examenstid 3h.

1. a) Bestäm LU-faktoriseringen av matrisen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

   b) Bevisa följande påstående med hjälp av reglerna för matrisalgebra: Om $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ och $\mathbf{C}$ är kvadratiska matriser av samma typ och $\mathbf{CA} = \mathbf{AB} = \mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ = identitetsmatrisen), så är $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

2. Då man tittar från riktningen $\vec{n} = \frac{1}{7}(6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k})$ på ett tredimensionellt lanskap på ett stort avstånd, ser man punkten $P = (x, y, z)$ i landskapet som en ortogonal projektion på en punkt P' i ett plan T genom origo O och med normalen $\vec{n}$. Låt $P' = (x', y')$ i ett kartesiskt koordinatsystem $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ i planet T, där $\vec{e}_1$ pekar horisontellt högerut sett från observatören, dvs. $\vec{e}_1$ är parallel med $\vec{k} \times \vec{n}$, och $\vec{e}_2$ pekar uppåt, dvs. $\vec{e}_2 \cdot \vec{k} > 0$. Bestäm avbildningen $(x, y, z) \to (x', y')$ i form av en linjär avbildning $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ och beräkna i form av vilken figur observatören ser en kvadrat i xy-planet som har två motsatta hörn i $(0, 0, 0)$ och $(-\sqrt{5}, \sqrt{5}, 0)$. Rita en figur!

3. Ekvationen
$$\int_0^1 \frac{e^{xyt}}{(x + y + t)^2}\, dt = a$$
   bestämmer en funktion $y(x)$ i en omgivning av punkten $x = 0$. Bestäm a och $y'(0)$, om $y(0) = 1$.

4. a) Låt $\vec{F}$ vara ett vektorfält i rummet och f ett skalarfält. Härled deriveringsformeln $\nabla \times (f\vec{F}) = \nabla f \times \vec{F} + f\, \nabla \times \vec{F}$.

   b) Flödet hos en elektrisk ström i rummet ges i cylindriska koordinater av $\vec{J} = e^{-r^2}\vec{e}_z$. Strömmen ger upphov till ett magnetfält på formen $\vec{H} = H(r)\vec{e}_\varphi$, där $H(0) = 0$. Bestäm $H(r)$ mha. Maxwells ekvation
$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \partial_r & \partial_\varphi & \partial_z \\ H_r & rH_\varphi & H_z \end{vmatrix} = \vec{J}.$$