

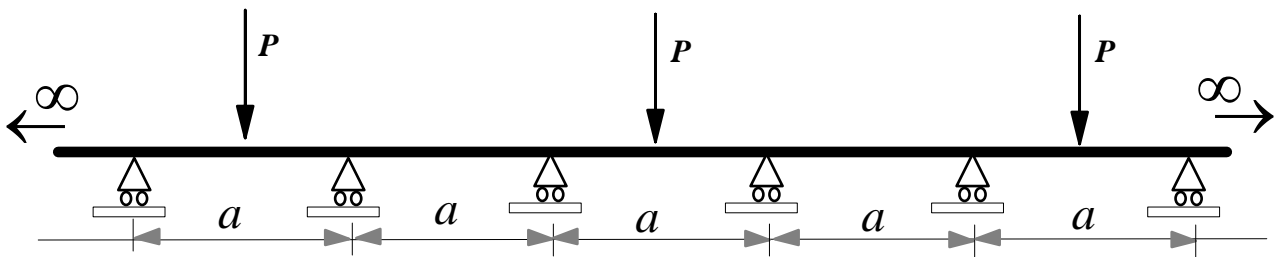
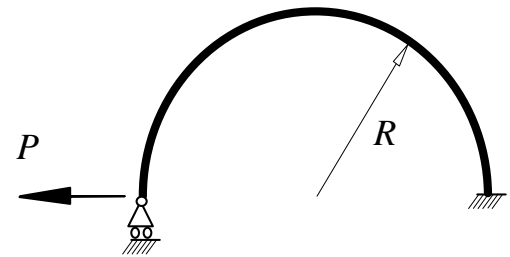
Rak-54.2100 RAKENTEIDEN MEKANIikka I

Tentti 13. 01. 2010

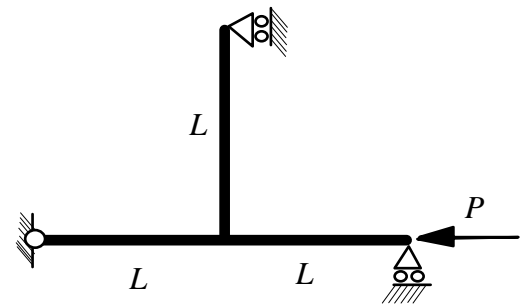
Kirjoita jokaiseen koepaperiin selvästi

- opintojakson nimi, koodi ja tentin päivämäärä
- kaikki nimesi puhuttelunimi alleviivattuna
- koulutusohjelma, opiskelijanumero, myös tarkistuskirjain
- milloin olet pakolliset kotitehtävät suorittanut sekä monettako kertaa olet tentissä

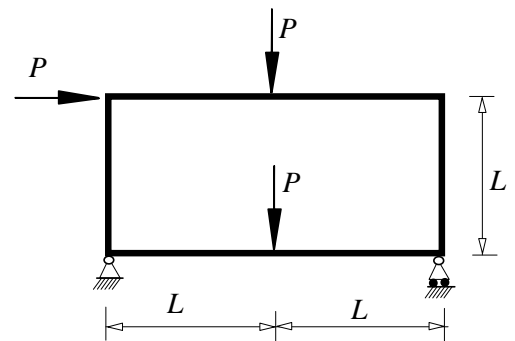
- Määritä oheisen puolimpyrän muotoisen kaaren kuormitetun tuen vaakasuora siirtymä. Kaaren taivutusjäykkyys on EI . Leikkaus- ja normaalivoiman vaikutusta siirtymään ei tarvitse ottaa huomioon.
- Määritä ja piirrä alla olevan äärettömän pitkän jatkuvan palkin taivutusmomentti- ja leikkausvoimajakaumat. Kaikkien sauvojen taivutusjäykkyys on EI . Opastus: Käytä hyväksesi symmetriaa.



- Määritä oheisen kehän kriittisen kuormaparametrin P_{kr} arvo nurjahduksen suhteen. Kaikkien sauvojen taivutusjäykkyys on EI .



- Määritä oheisen rengaskehän rajakuorman P_p arvo käyttämällä mekanismimenetelmää. Kaikkien sauvojen täysplastisen momentin arvo on M_p . Tarkasta lisäksi, että myötöehto toteutuu koko rakenteessa konstruoimalla tasapainoehdot toteuttava taivutusmomenttijakauma.



Tehtävä 1.

Kerran staattisesti määräämätön rakenne, yleinen voimamenetelmä.
Staattisesti määräämättömäksi suureksi valitaan rullatuen tukireaktio.

Ulkoisesta kuormasta P aiheutuva momenttijakauma kaaressa.

SMPM

$$M_0 = P \sin \phi R$$

$$M_1 = -(1 - \cos \phi)R$$

$$M_0 M_1 = PR^2 \left(\frac{1}{2} \sin(2\phi) - \sin \phi \right)$$

$$M_1 M_1 = R^2 (1 - 2 \cos \phi + \cos^2 \phi)$$

$$\delta_{10} = \int \frac{M_0 M_1}{EI} ds = \frac{PR^3}{EI} \left(\frac{1}{4} \int_0^\pi 2 \sin 2\phi d\phi - \int_0^\pi \sin \phi d\phi \right) = -2 \frac{PR^3}{EI}$$

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1 M_1}{EI} ds = \frac{R^3}{EI} \left(\int_0^\pi 1 - 2 \cos \phi + \cos^2 \phi d\phi \right) = \dots = \frac{3\pi R^3}{2EI}$$

$$\delta_{10} + X_1 \delta_{11} = 0 \rightarrow X_1 = \frac{4}{3\pi} P$$

Todellinen voimajakauma

$$M = M_0 + M_1 X_1 = P \sin \phi R - \frac{4}{3\pi} P (1 - \cos \phi) R = \frac{4RP}{3\pi} \left(\cos \phi + \frac{3\pi}{4} \sin \phi - 1 \right)$$

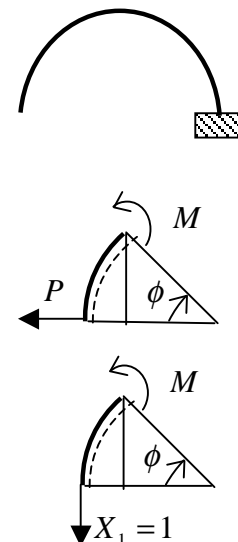
Castiglianon periaate

$$\overline{M} = \frac{dM}{dP} = \frac{4R}{3\pi} \left(\cos \phi + \frac{3\pi}{4} \sin \phi - 1 \right), \quad \left(\cos \phi + \frac{3\pi}{4} \sin \phi - 1 \right)^2$$

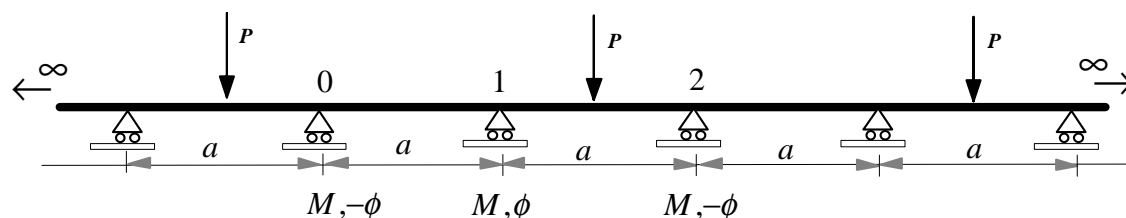
$$= \left(\cos^2 \phi + \frac{9\pi^2}{16} \sin^2 \phi + 1 - \frac{3\pi}{2} \sin \phi - 2 \cos \phi + \frac{3\pi}{2} \sin \phi \cos \phi \right)$$

$$\delta_P = \int \frac{M \overline{M}}{EI} ds = \frac{16PR^3}{9\pi^2 EI} \int_0^\pi \left(\cos^2 \phi + \frac{9\pi^2}{16} \sin^2 \phi + 1 - \frac{3\pi}{2} \sin \phi - 2 \cos \phi + \frac{3\pi}{2} \sin \phi \cos \phi \right) d\phi$$

$$= \frac{16PR^3}{9\pi^2 EI} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{9\pi^2}{16} \cdot \frac{\pi}{2} + \pi - 3\pi - 2 \cdot (0 - 0) + \frac{3\pi}{4} (-1 + 1) \right) = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{8}{3\pi} \right) \frac{PR^3}{EI} \approx 0,722 \frac{PR^3}{EI}$$



Tehtävä 2.



Symmetria: Kaikissa nurkissa sama Momentti, kiertymät vuorotellen erimerkkiset.

Yhteensopivuusehdot:

Sauvavakiot:

Nurkka 1: $\phi_{10} = \phi_{12} = \phi_1 = \phi$

$$a = \frac{4EI}{a}, b = \frac{2EI}{a}$$

Nurkka 2: $\phi_{21} = \phi_{23} = \phi_2 = -\phi_1 = -\phi$

Kuormitustermit Pistekuormasta:

$$MK_{12} = -\frac{Pa}{8}, MK_{21} = \frac{Pa}{8}$$

Kulmanmuutosmenetelmän yhtälöt, tuntemattomana kulmanmuutos:

$$M_{10} = a \cdot \overset{\psi}{\phi}_{10} + b \cdot \overset{\psi}{\phi}_{01}$$

$$M_{12} = a \cdot \overset{\psi}{\phi}_{12} + b \cdot \overset{\psi}{\phi}_{21} + MK_{12}$$

Nurkan 1 tasapainoehto:

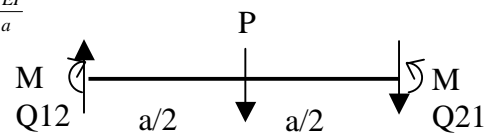
$$M_{10} + M_{12} = 0 \Rightarrow 2a\phi - 2b\phi + MK_{12} = 0, \phi = \frac{\frac{Pa}{8}}{\frac{4EI}{a} - \frac{2b}{2a}} = \frac{Pa^2}{32EI}$$

$$M_{10} = a \cdot \phi - b \cdot \phi = \frac{Pa}{16}, M = -\frac{1}{16} Pa$$

$$Q_{12}a + M - M - Pa/2 = 0, Q_{12} = P/2$$

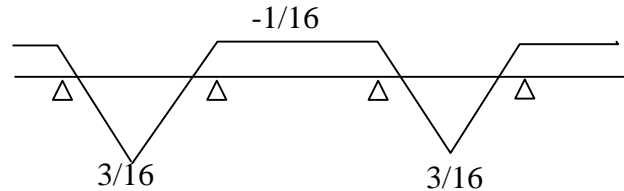
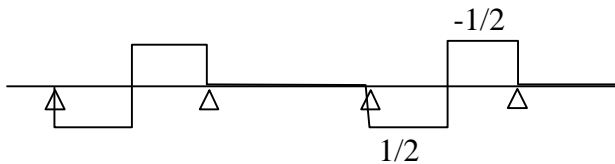
Momentti keskellä:

$$M_{kesk} - Pa/4 + Pa/16 = 0, M_{kesk} = \frac{3}{16} Pa$$



Q(P):

M(Pa):



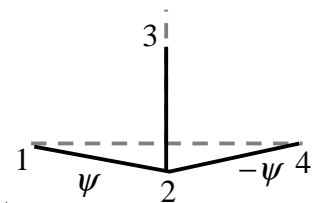
Tehtävä 3.

Sivusiirtyvä kehä. Siirtymäyhtälö nurkan 2 tasapainoyhtälöstä

(sauvassa 2-3 ei normaalivoimaa, sillä ei tukireaktiota tähän suuntaan)

Ratkaistaan kulmanmuutosmenetelmällä (sauvat 1-2 ja 2-4 puristettu ja taivutettu,

tuntemattomina ϕ_2 ja ψ).



$$Q_{21} = Q_{24} \Rightarrow -\frac{M_{21}}{L} - P\psi = -\frac{M_{24}}{L} + P\psi \quad (1)$$

$$\text{Nurkan 2 tasapainoyhtälö } M_{21} + M_{23} + M_{24} = 0 \quad (2)$$

Kulmanmuutosmenetelmän yhtälöt

$$M_{21} = A_0\phi_2 - C_0\psi, M_{23} = 3\frac{EI}{L}\phi_2, M_{24} = A_0\phi_2 + C_0\psi$$

Sauvavakiot:

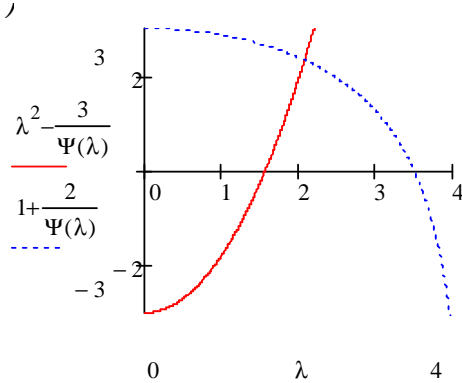
$$A_0 = C_0 = \frac{3EI}{L\Psi(\lambda)} \quad P = \frac{\lambda^2 EI}{L^2}$$

$$(1) \rightarrow \frac{2EI}{L^2} \left(\lambda^2 - \frac{3}{\Psi(\lambda)} \right) \psi = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \frac{3}{\Psi(\lambda)} = 0 \vee 1 + \frac{2}{\Psi(\lambda)} = 0$$

$$(2) \rightarrow \frac{3EI}{L} \left(1 + \frac{2}{\Psi(\lambda)} \right) \phi_2 = 0$$

Laskin, likiarvo esim. kuvaajien nollakohdista..

Osoittautui.. $\lambda = \frac{\pi}{2}, P_{kr} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 EI}{L^2}$



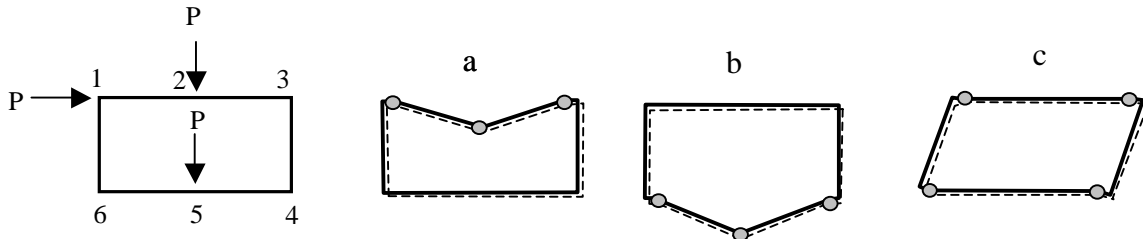
Tehtävä 4.

Perusmekanismien määrä:

$P = m - n = 6 - 3 = 3$ (tarvitaan 3 niveltä nurkkiin, jotta staattisesti määrätty)

2 palkkimekanismia ja 1 sivusiirtävä mekanismi.

Perusmekanismit:



a+b tulee sivusiirtäväksi.

Mekan.	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	$\frac{-W_{int}}{M_p \theta}$	$\frac{W_{ext}}{PL \theta}$	$P(M_p / L)$
a	$-\theta$	2θ	$-\theta$	0	0	0	4	1	4
b	0	0	0	$-\theta$	2θ	$-\theta$	4	1	4
c	θ	0	$-\theta$	$-\theta$	0	θ	4	1	4
a+c	0	2θ	-2θ	$-\theta$	0	θ	6	2	3
b+c	θ	0	$-\theta$	-2θ	2θ	0	6	2	3
a+b+c	0	2θ	-2θ	-2θ	2θ	0	8	3	$P_p = \frac{8}{3} \approx 2,67$

Yhdistelmämekanismi a+b+c

Tällöin itseisarvoltaan M_p plastinen momentti nivelissä 2-5.

Myötoehto nivelissä 1 ja 6. Tutkitaan nivel 1 mekanismilla a:

$$-W_{\text{int}} = M_1(-\theta) + M_2(2\theta) + M_3(-\theta) = -\theta M_1 + 3M_p \theta$$

$$W_{\text{ext}} = P_p L \theta$$

$$-W_{\text{int}} = W_{\text{ext}} \Rightarrow M_1 = (3M_p \theta - \frac{8}{3} M_p) = \frac{1}{3} M_p < |M_p|$$

Tutkitaan nivel 6 mekaniismilla b:

$$-W_{\text{int}} = M_4(-\theta) + M_5(2\theta) + M_6(-\theta) = -\theta M_6 + 3M_p \theta$$

$$W_{\text{ext}} = P_p L \theta$$

$$-W_{\text{int}} = W_{\text{ext}} \Rightarrow M_6 = (3M_p \theta - \frac{8}{3} M_p) = \frac{1}{3} M_p < |M_p|$$

